CAPITULO I

TEORIA DE LA PROBABILIDAD

EXPERIMENTO

Es toda acción que se realiza con el fin de observar el resultado.

EXPERIMETO DETERMINISTICO

Es un experimento cuyo resultado se puede predecir con exactitud.

EXPERIMENTO ALEATORIO

Es un experimento cuyo resultado no se puede predecir con exactitud.

Ejemplos:

1. Se lanza una moneda al aire.

Experimento: es aleatorio

Resultado: cae águila y cae sol.

2. se aplica a un voltaje de 10 volts a una resistencia de 10 Ω

Experimento: determinístico

Resultado: 5 Ω = 1 ampere

3. Medir la cantidad anual de agua que consumió una ciudad a durante cinco años consecutivos.

Experimento: probabilístico

Resultado: predecir la cantidad de agua que consumirá la ciudad a en el sexto año

ESPACIO MUESTRAL

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. se representa con S.

A cada uno de los resultados posibles que forman el espacio muestral se le llama "punto" del espacio muestral.

Ejemplos:

1. Experimento: se lanza un dado

   Resultado: cae cualquiera de sus seis caras

   S = (1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)

2. Experimento se lanzan dos dados

   a) Resultado: la suma de los números

      S = (2 , 3 , 4 , 5 , 6 ,….., 12)

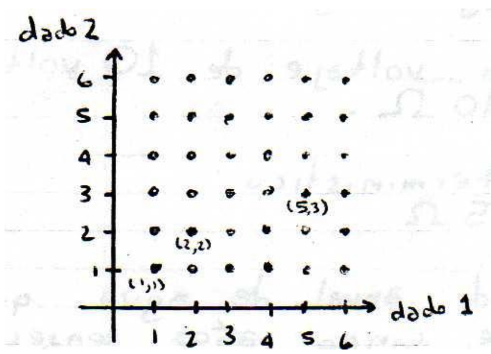
   b) Resultado: la suma de los números pero cuando los números son iguales

      S = (2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12)

   c) Resultado: las parejas de los números

      S = [(1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 3) , (1 , 4), ….., (6 , 6)]

Gráfica:



Cada uno de los puntos se les llaman punto del espacio muestral.

EVENTO

Es todo resultado posible de un experimento aleatorio. Es un subconjunto de un espacio muestral.

Ejemplo:

Sea el espacio muestral de un experimento:

S = (1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)

Y los eventos:

A = (2) ; B = (1 , 2 , 6) ; C = (1 , 3 , 5 , 6)

EVENTOS ELEMENTALES

Son aquellos eventos que no se pueden descomponer en subconjuntos más simples.

Para el ejemplo anterior, son eventos elementales:

A = (2) ; D = (1) ; E = (3) ; F = (4) ; G = (5) ; H = (6)

Los eventos que no son elementales se les llama eventos compuestos.

ALGEBRA DE EVENTOS

Considerando al espacio muestral S como un conjunto universal:

a. Complemento del evento A, que se representa A´
b. Unión de dos eventos A Y B, que se representa AUB
c. Intersección de dos eventos A Y B, que se representa $A \cap B$. Son los elementos que pertenecen A Y B.

Las siguientes leyes definen completamente el álgebra de eventos:

1) $A \cup B = B \cup A$

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

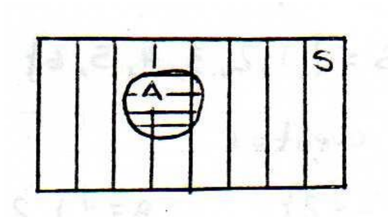
3) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

4) $(A')' = A$

5) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

6) $A \cap A' = \phi$

7) $A \cap S = A$

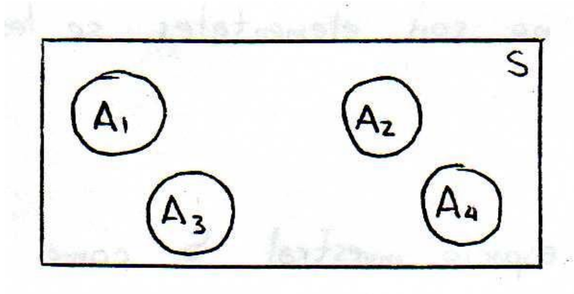


EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

El conjunto de eventos A1, A2, …, An son mutuamente excluyentes si:

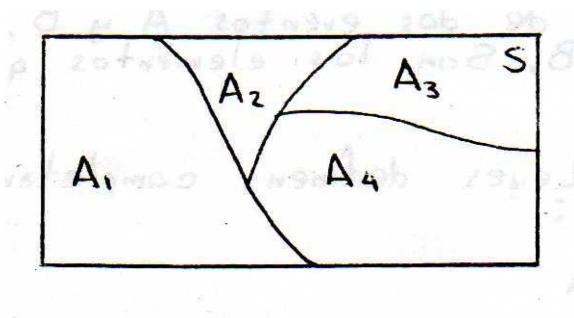
$$A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i \text{ ; Sí } i = j \\ \phi \text{ ; Sí } i \neq j \end{cases} \qquad i , j = 1 ,2 , \dots, n$$

Gráfica:



EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS

El conjunto de eventos A1, A2, …, An son colectivamente exhaustivos si:

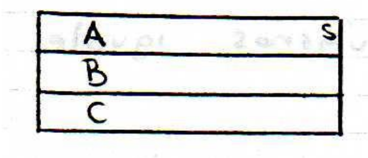


A1 U A2 U …. U An = S

Ejemplos:

1) Sea S = (2 , 4 , 6) y los eventos A = (2), B = (4), Y C = (6)

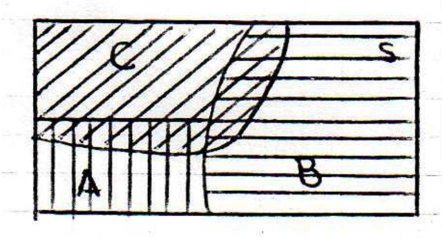
Gráfica:



Los eventos son: mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos

2) Sea S = (1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6) y los eventos: A = (1 , 2) y B = (4 , 5 , 6)

Gráfica:



Los eventos son: no son mutuamente excluyentes y si son colectivamente exhaustivos

3) Sea S = (1 , 2 , 3) y los eventos A = (1) y B = (3)

Los eventos son: mutuamente excluyentes y no son colectivamente exhaustivos

4) Sea S = (1 , 2 , 3 , 4 , 5) y los eventos A = (1 , 2 , 3) y B = (3 , 5)

Los eventos son: no son mutuamente excluyentes y no son colectivamente exhaustivos

Ejemplo 1:

Un experimento aleatorio consiste en tirar dos dados y observar las caras que caen hacia arriba. Definir los eventos que en lenguaje común se expresan:

a) A : caen dos números iguales

b) B : caen tres

c) C : caen menos de siete

d) D : caen más de diez

Y calcular lo siguiente:

1) N (A´)

2) N (B U D)

3) N (A $\cap$ B)

4) N (A ⋂ C´)

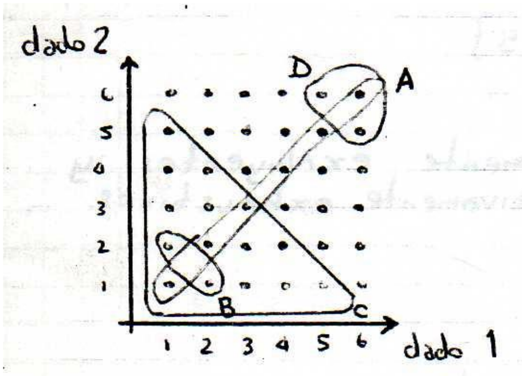
en donde N (A) es el número de eventos elementales que pertenecen a “A”

Experimento: se lanzan o tiran dos dados

Resultado: las caras que quedan hacia arriba.

S = [(1 , 1) , (1 , 2) , …….]

Gráfica:



a) A :

A = { (1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) , (5 , 5) , (6 , 6) }

b) B :

B= { (1,2), (2,1) }

c) C :

C = { (1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 3) , (1 , 4) , (1 , 5) , (2 , 1) , (2 , 2) , (2 , 3) ,

(2 , 4) , (3 , 1) , (3 , 2) , (3 , 3) , (4 , 1) , (4 , 2) , (5 , 1) }

d) D :

D = { (5 , 6) , (6 , 5) , (6 , 6) }

1) N (A´) = 30

2) N (B U D) = 5

3) N (A ⋂ B) = 0

4) N (A ⋂ C) = 3

Ejemplo 2:

Experimento: se tira una moneda

Resultado: cae águila o sol

$$S = [\text{Águila, Sol}]$$

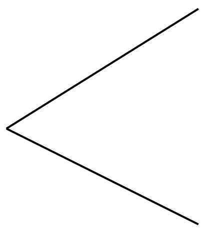
Definimos los eventos

A: Cae águila

B: Cae sol

$S = [\ A\ ,\ B\ ]$

½ A



½ B

Ejemplo 3:

Experimento: la moneda se tira dos veces

¿ $S = [A, B]$?

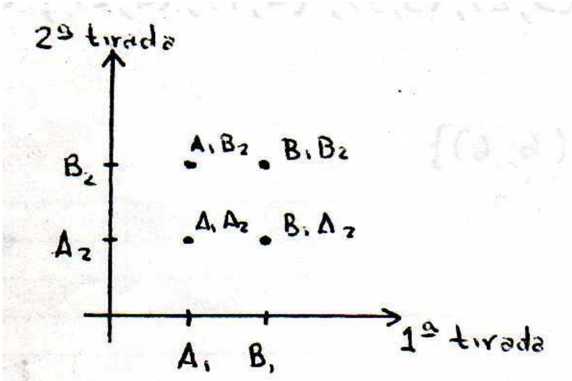
Se definen

A_i: cae águila en la tirada i-ésima

B_i: cae sol en la tirada i-ésima

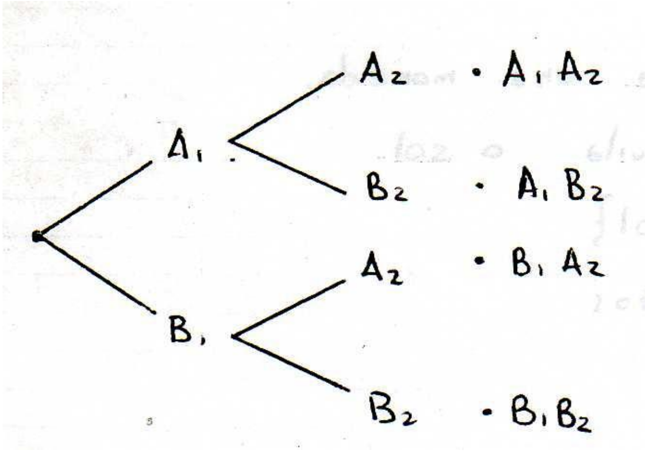
$S = [\ A_1\ ,\ B_1\ ,\ A_2\ ,\ B_2\ ]$

Gráfica:



A_1 B_1

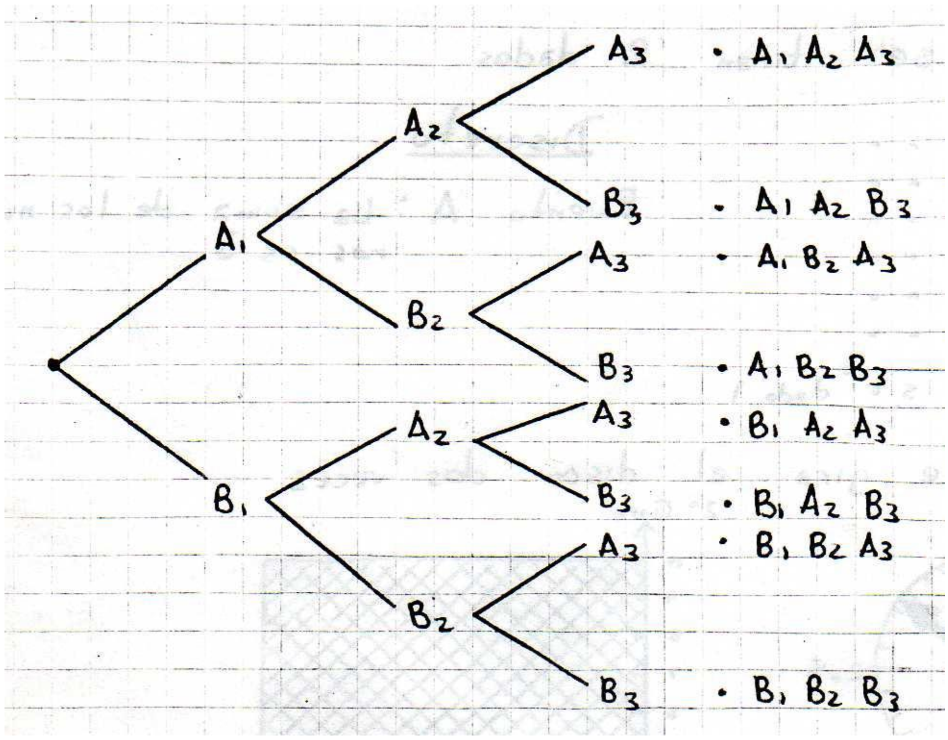
S = [A_1 A_2 , A_1 B_2 , B_1 A_2 , B_1 B_2]



Ejemplo 4

Experimento: se tiran tres monedas.

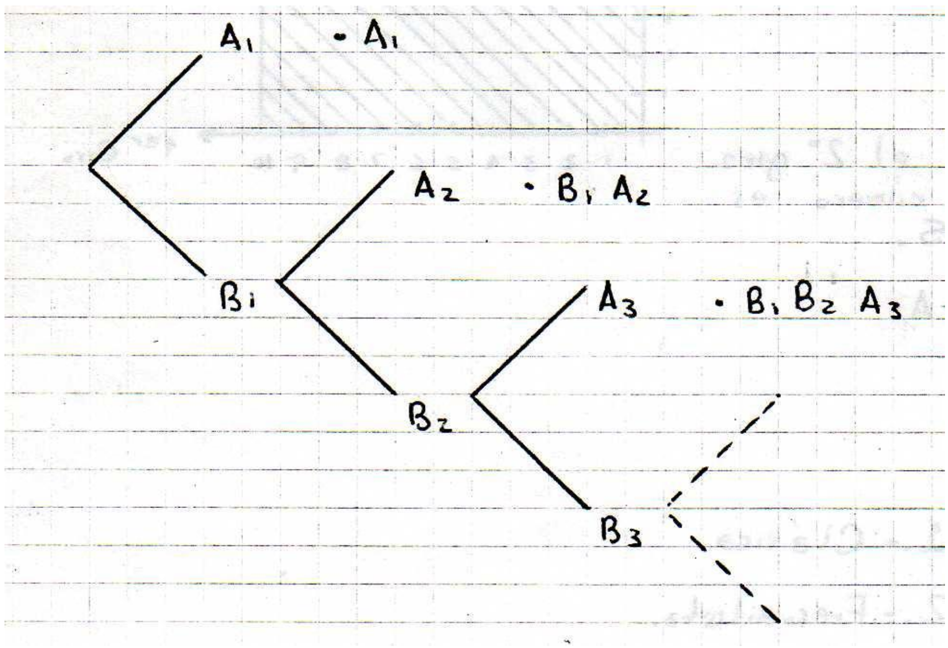
Gráfica:



Ejemplo 5

Experimento: se tira una moneda hasta que caiga águila

Gráfica:

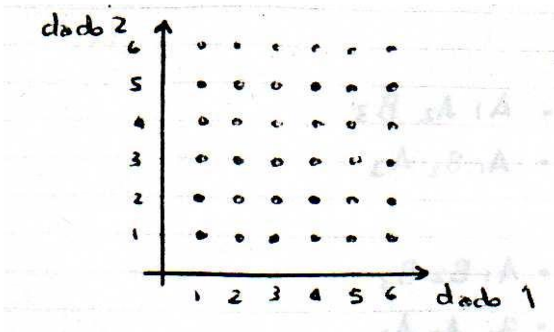


Ejemplo 6

Experimento: se tiran dos dados

Evento A: la suma de los números es tres

Gráfica:



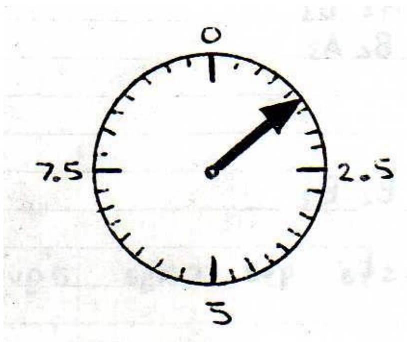
A = { (1,2) , (2,1)}

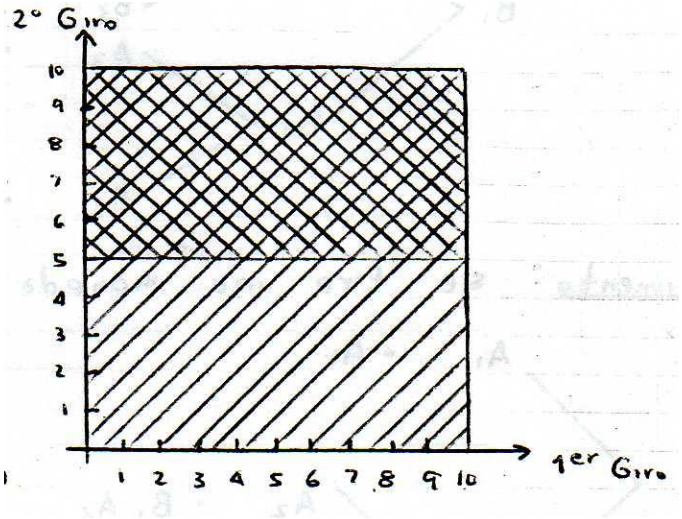
Conclusión: Evento Discreto

Ejemplo 7

Experimento: se gira el disco dos veces

A: en el segundo giro el número es mayor de cinco





Conclusión: Evento Continuo

PROBABILIDAD

Interpretaciones del concepto de probabilidad:

1 Clásica

2 Frecuentista

3 Subjetiva

Probabilidad Clásica:

Para esta interpretación de requiere: a) el espacio muestral es finito, y b) los eventos del espacio muestral son igualmente posibles.

Se llama probabilidad clásica del evento A, P(A), a la razón del número de eventos elementales de A, N(A), y el número de eventos elementales del espacio muestral S, N(S), esto es:

$$P(A) = N(A) / N(S)$$

Ejemplo:

1. Se tira un dado ¿cuál es la probabilidad de que caiga un dos?

$$P(2)= 1/6$$

Probabilidad Frecuentista:

Esta probabilidad se define siempre y cuando los experimentos puedan <u>repetirse un numero infinito de veces.</u>

Si un experimento se repite n veces, y sea Na el número de veces que se verifico el evento A, entonces se llama frecuencia relativa a la razón Na/N

Probabilidad Frecuentista de A = P(A)=Lim (Na/N)

Ejemplos:

2. Experimento: se tira una moneda

A: Cae águila

B: Cae calendario azteca

Probabilidad Clásica:

S=(A,B) ; P(A) = ½ = 0.5 = 50%

Probabilidad Frecuentista:

A=15 ; B=14

Frecuencia Relativa A = 15 / (15+14) = 0.517

P(A) = Lim (Na/N) = 0.517 = 51.7 %

3. Experimento: se tira una moneda, la cual está cargada

A: Cae águila

B: Un cinco

Probabilidad Clásica:

P(A) no se puede definir, ya que los eventos: A Y B, no son igualmente posibles.

Probabilidad Frecuentista:

P(A) = Lim (Na/N) = 9/10 = 0.9 = 90%

4. Experimento: Carrera de 8 Caballos

S = (1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, Y 8)

A: Gana el caballo 5

Probabilidad Clásica:

P(A) = 1/8 ; siempre y cuando todos los eventos sean igualmente posibles.

Probabilidad Frecuentista:

No por qué los eventos en la lógica del experimento no son igualmente posibles y fundamentalmente no puede realizarse la carrera un número infinito de veces por que los caballos se tienen que morir.

Probabilidad Subjetiva:

La probabilidad subjetiva mide la confianza que tiene un individuo determinado en la verdad de una proposición particular.

Ejemplos:

5. Experimento: Queremos saber si el Dr. José Narro Robles se va a reelegir.

Probabilidad Clásica:

S = (1, 2, 3)

P(A) = 1 / 3 ; siempre y cuando los eventos sean igualmente posibles.

Probabilidad Frecuentista:

No por qué los eventos no pueden repetirse un número infinito de veces.

Probabilidad Subjetiva:

P_1= 0.6

P_2 = 0.4

P_3 = 0.15

P_4 = 0.25

P_5 = 0.1

P (A) = (0.6+0.4+0.15+0.25+0.1)/5= 0.3

Problema

Se tienen 200 cilindros de concreto y se someten a una prueba de compresión, todos los cilindros son iguales y están bajo las mismas condiciones de humedad y temperatura, los resultados observados son los siguientes:

Limites (Kg / cm^2)	**Frecuencia (Nº)**
171 – 180	**10**
181 – 190	**12**
191 – 200	**25**
201 – 210	**132**
211 – 220	**21**
Total	**200**

La resistencia esta medida en Kg/cm^2. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

A : Un cilindro resiste entre 191 y 200 Kg/cm^2

B : Un cilindro resiste entre 201 y 210 Kg/cm^2

C : Un cilindro resiste entre 191 y 210 Kg/cm^2

D : Un cilindro resiste a lo sumo 200 Kg/cm²

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{25}{200} = 0.125 = \underline{12.5\%}$$

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{132}{200} = 0.66 = \underline{66\%}$$

$$P(C) = \frac{N_C}{N} = \frac{25 + 132}{200} = 0.785 = 78.5\%$$

$$P(D) = \frac{N_D}{N} = \frac{10 + 12 + 25}{200} = \frac{47}{200} = 0.235 = 23.5\%$$

Ejemplo:

En un tiro al blanco se tienen 12 resultados posibles, todos igualmente probables. Calcular:

-15, -4, 0, 1, 15, 40, 50, 100, 150, 300, 500, 1000

a) La posibilidad de acertar a un negativo

b) La posibilidad de que el resultado sea un positivo

c) La posibilidad de acertar al cero

d) La posibilidad de acertar a un valor no negativo

S = { -15, -4, 0, 1, 15, 40, 50, 100, 150, 300, 500, 1000 }

N(S) = número de eventos elementales en S = N(S) =12

N(A) = Número de eventos elementales en A (números negativos) = 2

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0.1667 = 16.67\% \; ; \; P(C) = \frac{N(C)}{N(S)} = \frac{1}{12} = 0.08 = 8\%$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\% \; ; \; P(D) = \frac{N(D)}{N(S)} = \frac{(12-2)}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

P(D) de otra forma tenemos que:

$$P(D) = \frac{N(D)}{N(S)} = \frac{N(B \cup C)}{N(S)} \Rightarrow P(D) = \frac{N(B) + N(C)}{N(S)} = \frac{9+1}{12} = \frac{5}{6}$$

Interpretación Subjetiva de la Probabilidad

De acuerdo con esta interpretación la probabilidad de un evento es el grado de certidumbre que tiene quien asigna la probabilidad de la ocurrencia de un evento. Una probabilidad igual a cero indica la certeza absoluta de que el evento no ocurrirá y una probabilidad igual a uno indica la certeza absoluta de que el evento ocurra.

Ejemplo :

En una caja se tienen diez canicas, seis negras y cuatro blancas, cual es la posibilidad (probabilidad) de que :

a) Si se extraen 3 canicas sin remplazo, todas sean del mismo color.

b) Si se extraen 3 canicas con remplazo, todas sean del mismo color.

c) Si se extraen 3 canicas con remplazo, exista la representación de cada color.

d) Si se extraen 3 canicas sin remplazo, exista la representación de cada color.

a) (4/10) (3/9) (2/8) + (6/10) (5/9) (4/8) = 0.2 = 20%

B_1 = sacar la primer canica

b) experimento B_2 = sacar la segunda canica

B_3 = sacar la tercer canica

(Blanca) (Blanca) (Blanca) + (Negra) (Negra) (Negra)

$$(4/10)\quad(4/10)\quad(4/10)\quad+\quad(6/10)\quad(6/10)\quad(6/10) = \frac{4^3+6^3}{10^3} = 0.28 = \underline{28\%}$$

c) $P(B_1)\,P(N_2)\,P(N_3) + P(B_1)\,P(B_2)\,P(N_3) + \ldots + P(N_1)\,P(B_2)\,P(B_3) =$

(4/10) (6/10) (6/10) + (4/10) (4/10) (6/10) + (4/10) (6/10) (4/10) + (6/10) (4/10) (6/10) + (6/10) (6/10) (4/10) + (6/10) (4/10) (4 /10) = 0.768 =76.8%

d) (4/10) (6/9) (5/8) + (4/10) (3/9) (6/8) + (4/10) (6/8) (3/8) + (6/10) (4/9) (5/8) + (6/10) (5/9) (4/8) + (6/10) (4 /9) (3/8) = 0.75 = 75%

Principio Fundamental del Conteo

Está formado por las siguientes reglas:

- **Regla del Producto.** si un evento puede ocurrir en "m" distintas formas y otro evento puede ocurrir en "n" distintas formas, entonces existen "m x n" distintas formas en las que los dos eventos pueden ocurrir.

- **Regla de la Suma.** si un evento puede ocurrir de “m” distintas formas u otro evento puede ocurrir de “n” distintas formas, entonces existen “m + n” distintas formas en la que uno de esos dos eventos pueden ocurrir.

Ordenaciones

Se llaman ordenaciones de n objetos de orden r a los diferentes grupos ordenados que se pueden formar al escoger r objetos de un grupo de n objetos dados, de tal manera que dos ordenaciones se consideran distintas si difieren en alguno de sus objetos o en el orden de ellos.

en la definición anterior se ha considerado implícitamente que el orden r es menor que el numero n de objetos dados, lo que equivale a no permitir la repetición de objetos en una misma ordenación.

Ejemplos:

1.- formar las ordenaciones de todos los órdenes de las cuatro letras : a, b, c ,d

- Ordenaciones de orden 1 :

a	b	c	d

- Ordenaciones de orden 2 :

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

- Ordenaciones de orden 3

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

- Ordenaciones de orden 4

abad	bacd	cabd	daba

abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Para determinar cuantos grupos ordenados se pueden formar al escoger r objetos de entre n objetos dados, de tal manera que dos de tales grupos se consideren distintos si difieren en alguno de sus objetos o en el orden de ellos, se aplicará el principio fundamental del conteo dividiendo el problema en los siguientes actos:

1º) escoger el primer objeto → n maneras diferentes.

2º) escoger el segundo objeto → n – 1 maneras diferentes.

3º) escoger el tercer objeto → n – 2 maneras diferentes.

rº) escoger el r-ésimo objeto → n – 2 maneras diferentes,

Luego, si se representa con O_n^r el número de las ordenaciones de n objetos de orden r, se tendrá

$$O_n^r = n\,(n-1)\,(n-2)\,....\,[\,n-(r-1)\,]\,....\,(\mathrm{I})$$

r factores

Y de acuerdo con:

$$\frac{n\,!}{(n-r)\,!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-r+1)\,(n-r)\,!}{(n-r)\,!}$$

$$= \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}_{\text{r factores}}$$

Se puede escribir que:

$$O_n^{\,r} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!} \qquad \ldots (\text{II})$$

Se debe entender por ordenaciones de n objetos tomando r de ellos a la vez a los diferentes grupos que se pueden formar al seleccionar r de los n objetos.

Sea O (n, r) el número de ordenaciones de n objetos que se pueden obtener tomando r de ellos a la vez, la siguiente expresión nos permite conocer O (n, r) :

$$O\,(n\,,r) = \frac{n\,!}{(n-r)\,!} \qquad \ldots (\text{II}')$$

Ejemplos:

2.- Calcular el número de arreglos diferentes de tres letras que se puedan formar con las letras de la palabra "Olivera", si en los arreglos no se permiten tener letras repetidas.

Teniendo en cuenta que en la palabra "Olivera", hay siete letras, de las que se requiere formar grupos ordenados de tres letras, se tiene:

$$O_7^{\,3} = \frac{7!}{(7-3)\,!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ arreglos}$$

3.- ¿Cuantos comités formados por un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal se pueden elegir de un grupo de diez personas que son candidatos a cualquiera de los puestos?

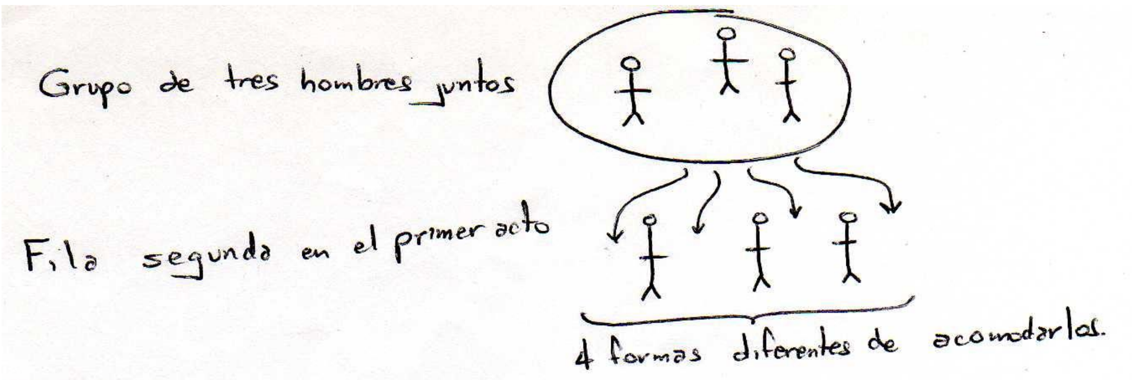
Ahora se trata de contar el número de grupos ordenados que se pueden formar al seleccionar cuatro de diez personas dadas, en los que, desde luego, no se puede repetir alguna de ellas en un mismo grupo. Luego se tiene que el número vale:

$$O_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5{,}040 \text{ COMITES}$$

4.- ¿Cuantas filas de seis hombres se pueden formar de un grupo de diez, si tres de los hombres siempre deben estar juntos, aparezcan o no en la fila?

Para resolver el problema debe dividirse en dos: en uno primero se calculara el número de más en donde no aparezcan los tres hombres de la condición y en el segundo se determinaran las filas en donde si aparezca ese grupo de tres hombres. Para resolver el primer problema se deben contar simplemente el número de grupos ordenados de seis hombres que se pueden formar de siete dado (los diez originales menos los tres de la condición). Para encontrar la respuesta del segundo problema deben considerarse los siguientes actos:

- **Primer acto: formar una fila de tres hombres seleccionados de los siete que no tienen condición O_7^3**
- **Segundo acto: llevar a la fila formada de tres hombres en el acto anterior, el grupo de los tres que deben estar juntos**



- **Tercer acto: ordenar entre si el grupo de los tres hombres juntos O_3^3**

De lo anterior se concluye que el número total de filas formadas en la forma descrita es:

$$O_7^6 + O_7^3 \times 4 \times O_3^3 = \frac{7!}{(7-6)!} + \frac{7!}{(7-3)!} \times 4 \times \frac{3!}{(3-3)!} =$$

$$= \frac{7!}{1!} + \frac{7! \times 4 \times 3!}{4! \ 0!}$$

= (7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2) + (7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1) =

= 5,040 + 5,040 = 10,080 filas

ORDENACIONES CON REPETICION

Las ordenaciones con repetición son ordenaciones en donde pueden repetirse objetos en una misma ordenación, por lo que puede suceder que el orden r de las ordenaciones con repetición sea mayor que el numero n de objetos dados.

Ejemplos:

5.- formar las ordenaciones con repetición de Orden 1 y de Orden 2, de las cuatro letras: a, b, c, d.

- **Ordenaciones con repetición de Orden 1:**

a	**b**	**c**	**d**

- **Ordenaciones con repetición de Orden 2:**

aa	**ba**	**ca**	**da**
ab	**bb**	**cb**	**db**
ac	**bc**	**cc**	**dc**
ad	**bd**	**cd**	**dd**

Análogamente a las ordenaciones simples, el principio fundamental del conteo permite obtener la fórmula para el número de ordenaciones con repetición de n objetos de orden r, teniendo en cuenta que ahora cada uno de los r objetos puede seleccionarse de n maneras distintas. Representado con OR_n^r al número de las ordenaciones con repetición de n objetos de orden r, se obtiene:

$$OR_n^r = \underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{r \text{ factores}}$$

$$OR_n^r = n^r \quad \dots. \text{ (III)}$$

Ejemplos:

6.- Se tienen veinte banderas, de las cuales cinco son blancas, cinco negras, cinco rojas y cinco azules. Calcular el número de señales diferentes que se pueden formar al colocar cinco banderas simultáneamente en una asta bandera.

al tener por lo menos cinco banderas de cada color, se está permitiendo repetir un color todas las veces necesarias; por lo tanto, se trata de determinar el

número de grupos ordenados que se pueden formar al seleccionar, con repetición, cinco objetos de un grupo de solo cuatro. El número de señales es entonces:

$$OR_4^5 = 4^5 = 1{,}024 \text{ SEÑALES}$$

7.- ¿Cuantos mensajes se pueden formar con los puntos y rayas del alfabeto morse, si en cada uno de ellos pueden entrar hasta cuatro de tales elementos?

- **Mensajes con un elemento:** $OR_2^1 = 2^1 = 2$
- **Mensajes con dos elementos:** $OR_2^2 = 2^2 = 4$
- **Mensajes con tres elementos:** $OR_2^3 = 2^3 = 8$
- **Mensajes con cuatro elementos:** $OR_2^4 = 2^4 = 16$

Total de mensajes = 2 + 4 + 8 + 16 = 30

PERMUTACIONES

Las permutaciones de n objetos son las ordenaciones de esos mismos n objetos de orden n. Así, las permutaciones permiten resolver problemas en donde se trate de determinar el número de maneras diferentes en que un grupo de n objetos dados se pueden ordenar.

Si se representa con P al número de las permutaciones de n objetos, se tendrá, de acuerdo a la definición anterior y a la expresión (II)

$$P_n = O_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$P_n = n! \quad \ldots \text{(IV)}$$

Se deberá entender por permutaciones a las ordenaciones que se forman con n objetos considerando todos ellos a la vez, esto es:

$$O(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

El número de permutaciones de n objetos se representara por P por lo tanto:

$$P_n = n! \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(IV)}$$

Ejemplos:

8.- Formar las 24 permutaciones de las cuatro letras a,b,c,d

abcd	**bacd**	**cabd**	**dabc**
abdc	**badc**	**cadb**	**dacb**
acbd	**bcad**	**cbad**	**dbac**
acdb	**bcda**	**cbda**	**dbca**
adbc	**bdac**	**cdab**	**dcab**
adcb	**bdca**	**cdba**	**dcba**

9.- ¿De cuantas maneras se pueden colocar diez libros, si cuatro de ellos deben estar siempre juntos?

Para tener en cuenta la condición de que cuatro de los libros deben estar siempre juntos, se considerara ese grupo de cuatro libros como un solo objeto y se dividirá el problema en los siguientes actos:

- **Primer Acto: permutar de todas las maneras posibles siete objetos (los seis libros individuales y el grupo de cuatro que deben estar juntos) $P_7 = 7!$**

- **Segundo acto: permutar entre si el grupo de los cuatro libros que deben estar juntos $P_4 = 4!$**

Aplicando el principio fundamental del conteo, se tendrá que los diez libros pueden colocarse de:

$$P_7 \;.\; P_4 = 7!\,4! = 5{,}040 \times 24 = 120{,}960 \text{ Maneras}$$

Si en este ejemplo se requiere que el grupo de cuatro libros deba ocupar un lugar determinado, la respuesta es:

$$P_6 \times 1 \times P_4 = 6! \times 1 \times 4! = 720 \times 24 = 17{,}280$$

COMBINACIONES

Se llaman combinaciones de n objetos de orden r, a los diversos grupos que pueden formarse al elegir r objetos de n objetos dados, de tal manera que dos combinaciones se consideran distintas si difieren en uno de sus objetos por lo menos.

A diferencia de las ordenaciones, en las combinaciones no interesa el orden de los objetos, sino únicamente la clase de los mismos.

En la definición de combinación también se supuso implícitamente que el orden de r no es mayor que el número de n de objetos en una misma combinación.

Ejemplos:

10.- Formar las combinaciones de todos los órdenes de las cuatro letras a, b, c, d

- **Combinaciones de orden 1 : a b c d**
- **Combinaciones de orden 2 : ab bc cd ac bd ad**
- **Combinaciones de orden 3 : abc bcd abd acd**
- **Combinaciones de orden 4 : abcd**

Para determinar el número de las combinaciones de n objetos de orden r, considérense formadas todas las combinaciones y que C_n^r es su número. Si en cada una de las combinaciones formadas se permutan sus r objetos de las r! maneras posibles, se obtendrán en total $r!C_n^r$ ordenaciones de los n objetos dados de orden r.

En la forma antes descrita, se han formado todas las ordenaciones de n objetos de orden r, ya que las provenientes de una misma combinación son diferentes porque difieren en el orden de sus objetos, y las que vienen de combinaciones distintas difieren por lo menos en uno de sus objetos. Luego puede escribirse que:

$$r!\ C_n^r = O_n^r$$

y teniendo en cuenta (II)

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad \text{…. (V)}$$

Se debe entender por combinaciones de n objetos tomando r de ellos a la vez, a los diferentes grupos que pueden tomarse al seleccionar r de los n objetos, sin importar el orden de los objetos que forman cada grupo.

Sea C (n, r) el número de combinaciones de n tomando r a la vez, la siguiente expresión nos permite conocer C (n, r)

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{....(V´)}$$

Ejemplos :

11.- De un grupo de diez personas debe elegirse un comité formado por cinco. Calcular el número de comités que se pueden elegir, si :

a) **Las diez personas son elegibles libremente.**
b) **Dos de las personas elegibles, no pueden aparecer juntas en el comité.**
c) **Dos de las personas elegibles deben estar siempre juntas, dentro del comité o fuera de él.**
d) **En el comité debe haber un presidente.**

Solución:

a) Las cinco personas pueden seleccionarse de las diez elegibles de:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252 \text{ maneras}$$

b) Si las dos personas de la condición están en el comité, los otros tres miembros se elegirán de las ocho personas restantes de:

$$C_{8}^{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56 \text{ maneras}$$

Así hay 252 – 56 = 196 comités en los que no están juntas las dos personas peleadas.

c) si las dos personas de la condición están en el comité, las tres restantes se escogen de:

$$C_{8}^{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56 \text{ maneras}$$

Los comités en donde la pareja no está, son:

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56 \text{ maneras}$$

Luego el total de comités con o sin la pareja son:

56 + 56 = 112

Y la pareja siempre unida.

d) Existen 10 maneras de elegir presidente y

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126 \text{ maneras}$$

Maneras de obtener se corte. Así, habrá 10 x 126 = 1260 comités de cinco miembros, siendo uno de ellos su presidente

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Ejemplo:

$$12.- (a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + \frac{5 \times 4}{1 \times 2} a^3 b^2 + \frac{5 \times 4}{1 \times 2} a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

BASE AXIOMATICA

AXIOMAS :

1.-) $P(A) \geq O$, para todo evento del espacio muestral

2.-) $P(S) = 1$

3.-) $P(A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots\ldots + P(A_N)$

SI $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes

1 TEOREMA.- $P(Ø) = O$

Evento Imposible

Demostración:

$$S + Ø = S$$

$$P(S + Ø) = P(S)$$

Por el axioma 3: $P(S) + P(Ø) = P(S)$

Por el axioma 2: $1 + P(Ø) = 1$

$$P(Ø) = O$$

2 TEOREMA .- $P(A') = 1 - P(A)$

Demostración:

$$A + A' = S$$

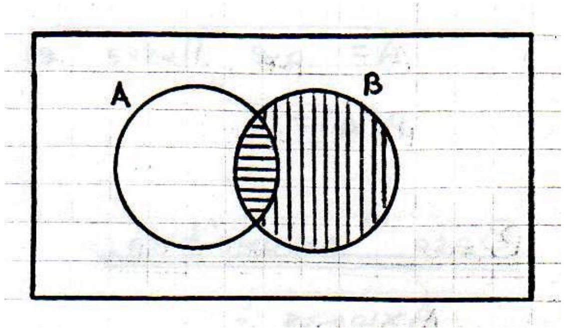
$$P(A + A') = P(S)$$

$$P(A) + P(A') = P(S)$$

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

3 TEOREMA : $P(A'B) = P(B) - P(AB)$



Demostración:

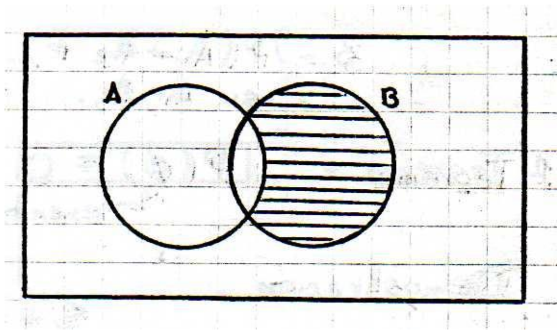
$$B = (A'B) + (AB)$$

$$P(B) = P((A'B) + (AB))$$

$$P(B) = P(A'B) + P(AB)$$

$$P(A'B) = P(B) - P(AB)$$

4 TEOREMA : $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ **; EN GENERAL** $AB \neq \varnothing$



Demostración:

$$A + B = A + (A'B)$$

$$P(A+B) = P(A + (A'B))$$

$$P(A + B) = P(A) + P(A'B)$$

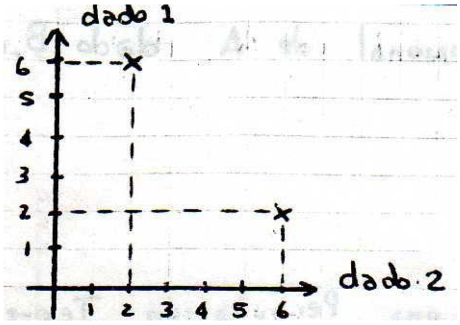
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Ejemplo:

Experimento, se tiran dos dados.

a) determinar la probabilidad de que resulten caras iguales o sus valores sumen más de 7.

S = { (1,1), (1,2), (1,3), ……….}



Evento A : Caen caras iguales

A = { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) }

Evento B: Las caras suman más de 7

B = {(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(4,4),(4,5), (4,6),(3,5),(3,6),(2,6)}

AB = {(4,4),(5,5),(6,6)}

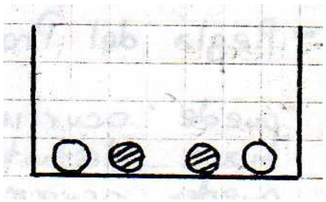
¿ AB ≠ Ø ? No ∴ A Y B no son mutuamente excluyentes.

P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)

$$P(A + B) = \frac{6}{36} + \frac{15}{36} - \frac{3}{36} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Ejemplo: Se tiene una urna con dos bolas blancas y dos bolas negras. Si se extraen dos bolas sin remplazo, primero una y luego la otra. ¿cuál es la probabilidad de que primero salga una bola blanca y luego una negra?

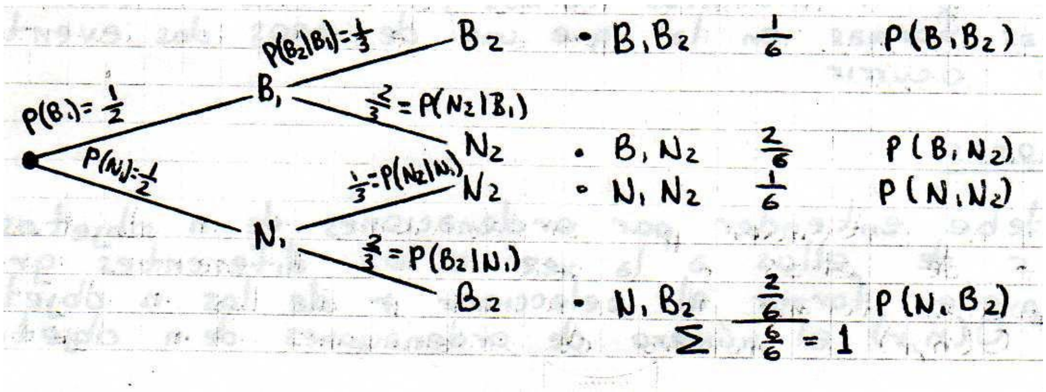


Solución:

$P(B_1) = 2/4 = ½$

$P(N_2) = ⅔$

$P(B_1 \quad N_2) = P(B_1) \bullet P(N_2) = ½ \bullet ⅔ = 2/6 = 1/3$



$P(B_1 N_2) = P(B_1) \; P(N_2/B_1)$

$2/6 = ½ \bullet ⅔$

$$P(N_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1 N_2)}{P(B_1)}$$

Se define la probabilidad condicional de A dado B, como:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A B)}{P(B)}$$

Problema

Se tira un dado y cae un numero par ¿cuál es la probabilidad que sea un 2 o un 4. Utilizar el concepto de probabilidad condicional.

S = (1, 2, 3, 4, 5, 6)

A = (2, 4, 6)

B = (2 , 4)

$$P (B \mid A) = \frac{P(BA)}{P (A)} = \frac{2/6}{3/6} = 2/3 = 0.6667 = \underline{66.67\%}$$

Ejemplo:

Con base en su experiencia un médico ha recabado la siguiente información relativa a las enfermedades de sus pacientes:

5% creen tener VIH y lo tienen
45% creen tener VIH y no lo tienen
10% no creen tener VIH pero si lo tienen
40% creen no tenerlo y efectivamente no lo tienen

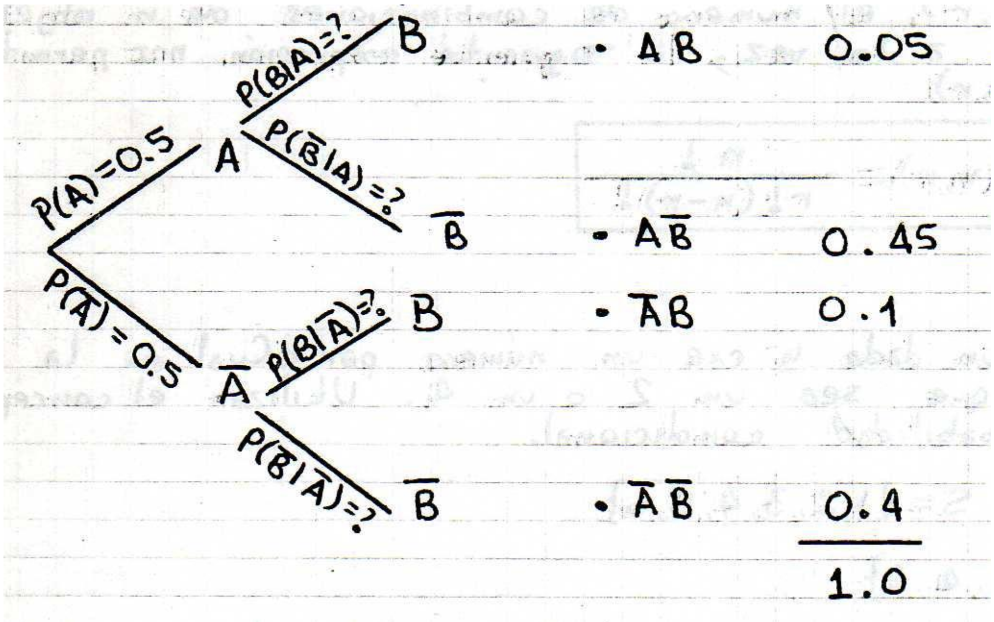
Si se selecciona un paciente al azar, determinar las siguientes probabilidades:

a) **Que tenga VIH si cree tenerlo**
b) **que tenga VIH si no cree tenerlo**
c) **que crea tener VIH y no lo tenga**
d) **que crea tener VIH y si lo tenga**

Solución:

A: El paciente cree tener VIH

B: El paciente tiene VIH



$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = 0.05 + 0.1 = 0.15$

$P(\overline{B}) = P(A\overline{B}) + (\overline{A}\ \overline{B}) = 0.45 + 0.4 = 0.85$

a)

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.5} = 0.1 = \underline{10\%}$$

b)

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 = \underline{20\%}$$

Tarea c y d

Problema:

Una maquina funciona correctamente siempre y cuando no falle ninguno de sus componentes A o B. la probabilidad de que falle el componente A es de 0.2 y la probabilidad de que falle el componente B es de 0.3, considerándose estas fallas independientes.

a) Cual es la probabilidad de que la maquina deje de funcionar

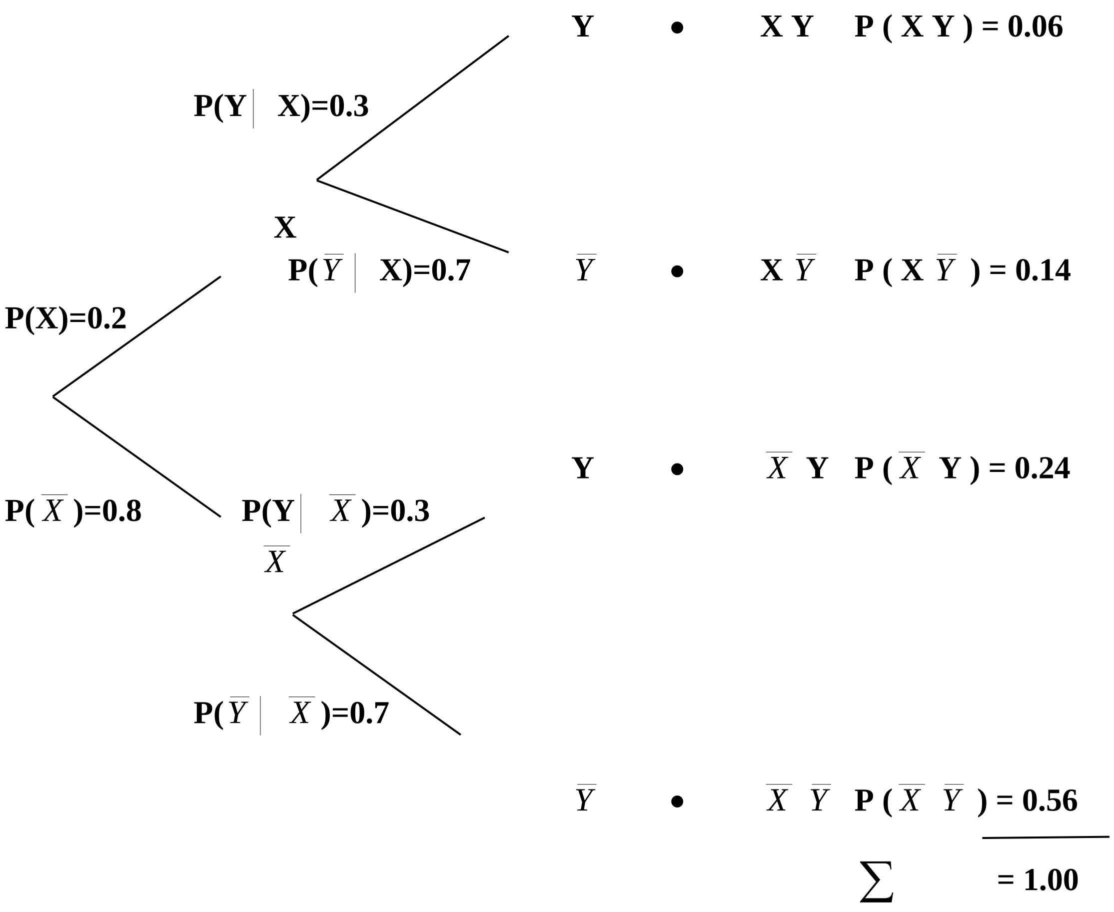
b) Verificar que los componentes a y b fallan en forma independiente

Solución:

X: El componente A falla

Y: El componente B falla

Z: La máquina falla



A) P (Z) = ?

$$P(Z) = P(XY) + P(X\overline{Y}) + P(\overline{X}Y)$$
$$P(Z) = 0.06 + 0.14 + 0.24$$
$$P(Z) = 0.44$$
$$P(\overline{Z}) = 0.56$$

EVENTOS INDEPENDIENTES:

Dos eventos a y b son independientes si se verifica :

$$P(A \mid B) = P(A)$$

De la definición de probabilidad condicional:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(B)\,P(A \mid B)$$

Si a y b son independientes, esto es si

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Se tiene:

$$P(A \mid B) = P(B)\,P(A)$$

b) $$P(Y \mid X) = \frac{P(YX)}{P(X)} = \frac{0.06}{0.2} = 0.3$$

Además: $P(Y) = 0.3$

Como se observa

$$P(Y \mid X) = P(Y)$$

Si se tienen dos eventos A Y B

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

O bien:

$$P(AB) = P(B)\,P(A \mid B)$$

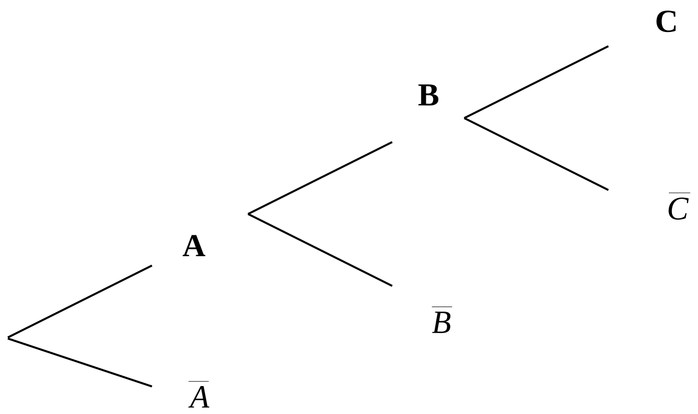
$$P(AB) = P(A)\,P(B \mid A)$$

Se tienen tres eventos A, B Y C :

$$\mathbf{P(A\,B\,C) = P(A\,B)\,P(C \mid A\,B)}$$
$$\mathbf{= P(A)\,P(B \mid A)\,P(C \mid A\,B)}$$

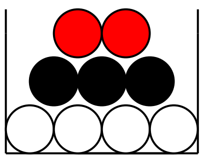
Si A, B Y C son independientes:

$$\mathbf{P(A\,B\,C) = P(A)\,P(B)\,P(C)}$$



Ejemplo :

Experimento: se extraen tres bolas:



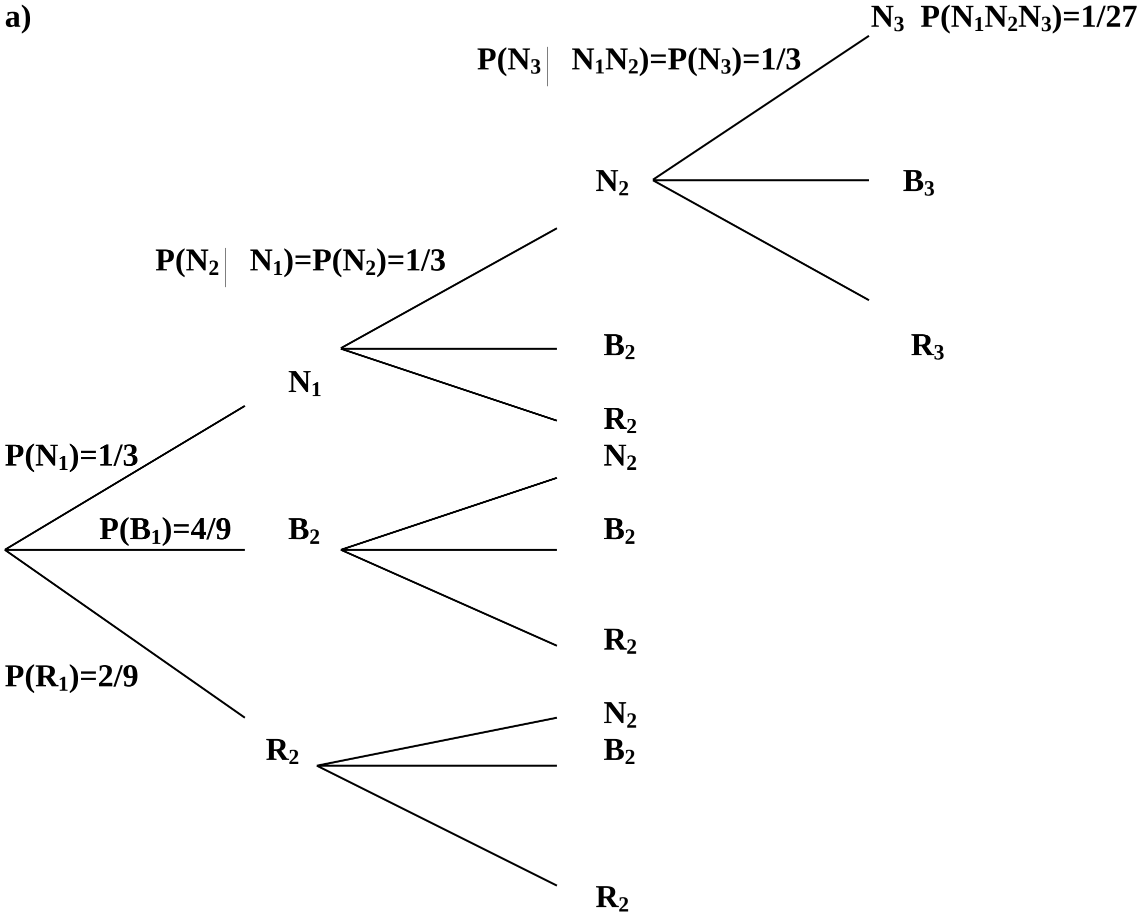
2 Rojas
3 Negras
4 Blancas

a) Con remplazo

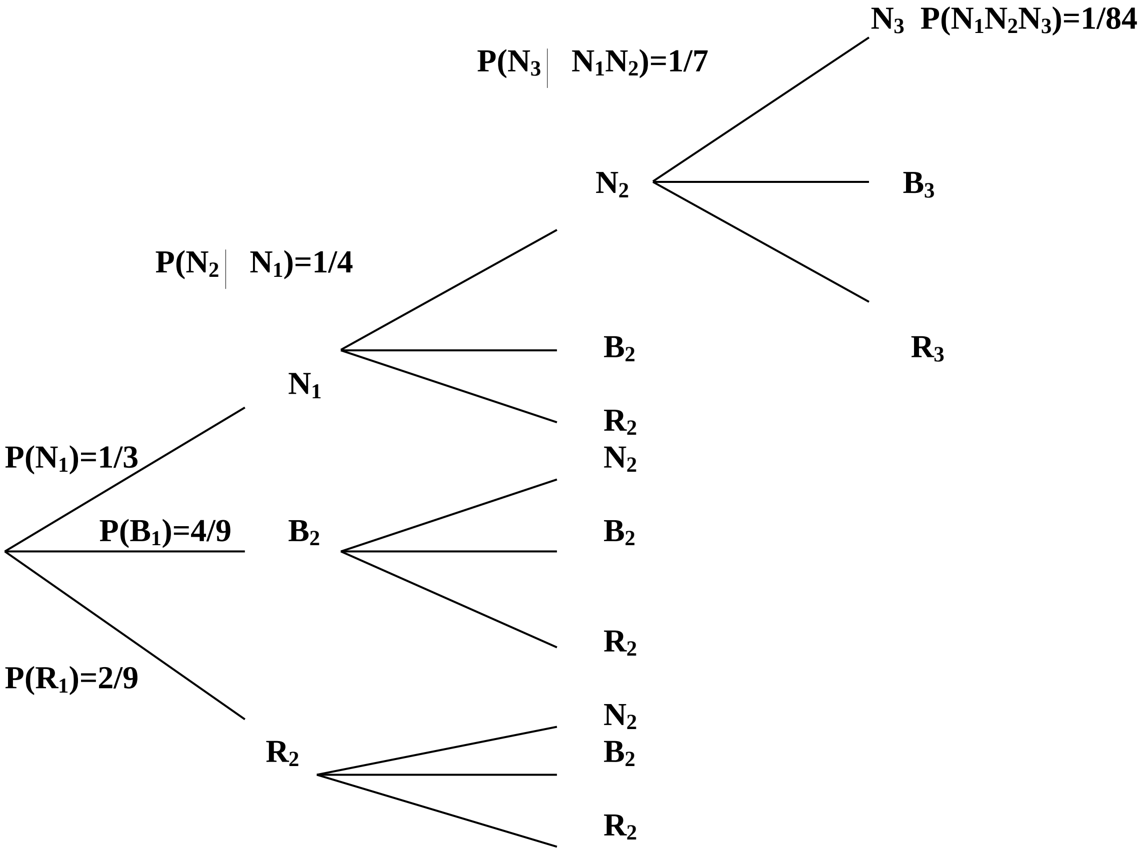
b) Sin remplazo

¿ Cuál es la probabilidad de que las tres sean negras ?

a)


N_3 $P(N_1N_2N_3)=1/27$
$P(N_3 | N_1N_2)=P(N_3)=1/3$
N_2
B_3
$P(N_2 | N_1)=P(N_2)=1/3$
B_2
R_3
N_1
R_2
$P(N_1)=1/3$
N_2
$P(B_1)=4/9$
B_2
B_2
R_2
$P(R_1)=2/9$
N_2
R_2
B_2
R_2

b)


N_3 $P(N_1N_2N_3)=1/84$
$P(N_3 | N_1N_2)=1/7$
N_2
B_3
$P(N_2 | N_1)=1/4$
B_2
R_3
N_1
R_2
$P(N_1)=1/3$
N_2
$P(B_1)=4/9$
B_2
B_2
R_2
$P(R_1)=2/9$
N_2
R_2
B_2
R_2

TEORAMA DE BAYES

Si los n eventos a_1, a_{2},………, a_n son <u>mutuamente excluyentes</u> y <u>colectivamente exhaustivos</u>, esto es :

$$A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n = S$$

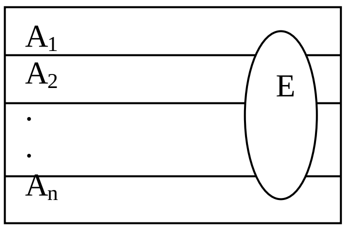
$$A_i\, A_j \neq \emptyset \qquad , \quad V\ \ i, j$$

Entonces para cualquier evento E $\subset$ S se tiene:

$$P(A_j \mid E) = \frac{P(A_j)\, P(E \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(E \mid A_i)} \quad ; \quad (j = 1, 2, \ldots , n)$$

Demostración:

S



$$E = EA_1 + EA_2 + \ldots\ldots + EA_n$$

$$P(E) = P(EA_1 + EA_2 + \ldots\ldots EA_n)$$

$$P(E) = P(EA_1) + P(EA_2) + \ldots\ldots + P(EA_n)$$

$$P(E) = P(A_1)\, P(E \mid A_1) + P(A_2)\, P(E \mid A_2) + \ldots\ldots\ldots + P(A_n)\, P(E \mid A_n)$$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai)\, P(E \mid A_i)$$

Como

$$P(A_j \mid E) = \frac{P(A_j\, E)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(A_j)\, P(E \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(E \mid A_i)} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots , n$$

<u>Problema :</u>

Pedro está acusado de un crimen. La probabilidad de que el jurado emita el veredicto correcto es de 0.95, esto es la probabilidad sé que el jurado condene a un culpable verdadero es de 0.95 y la probabilidad de que absuelva a un inocente es de 0.95 . Se sabe que labor de la policía es tal que el 99 % de las personas que se presentan en la corte para ser juzgadas son verdaderamente culpables. Determinar la probabilidad de que pedro sea inocente si el jurado lo declara inocente.

Solucion :

A: Pedro es culpable verdaderamente
B: El jurado lo declara culpable

$P(A)=0.99$ — A

- $P(B \mid A)=0.95$ — B • $P(A\,B) = 0.9405$
- $P(\overline{B} \mid A)=0.05$ — $\overline{B}$ • $P(A\,\overline{B}) = 0.0495$

$P(\overline{A})=0.01$ — $\overline{A}$

- $P(B \mid \overline{A})=0.05$ — B • $P(\overline{A}\,B) = 0.0005$
- $P(\overline{B} \mid \overline{A})=0.95$ — $\overline{B}$ • $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 0.0095$

$$\sum = 1.0000$$

Por el Teorema de Bayes:

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A})\,P(\overline{B} \mid \overline{A})}{P(A)\,P(\overline{B} \mid A) + P(\overline{A})\,P(\overline{B} \mid \overline{A})}$$

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{(0.01)(0.95)}{(0.99)(0.05) + (0.01)(0.95)} = 0.161$$

Otra forma seria:

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{0.0095}{0.0590} = 0.161$$

Para calcular B, se calcula sumando donde aparezcan las B, es decir:

$$\begin{array}{rr} & P(A\,\overline{B}) = 0.0495 \\ + & P(\overline{A}\,\overline{B}) = 0.0095 \\ \hline & 0.0590 \end{array}$$

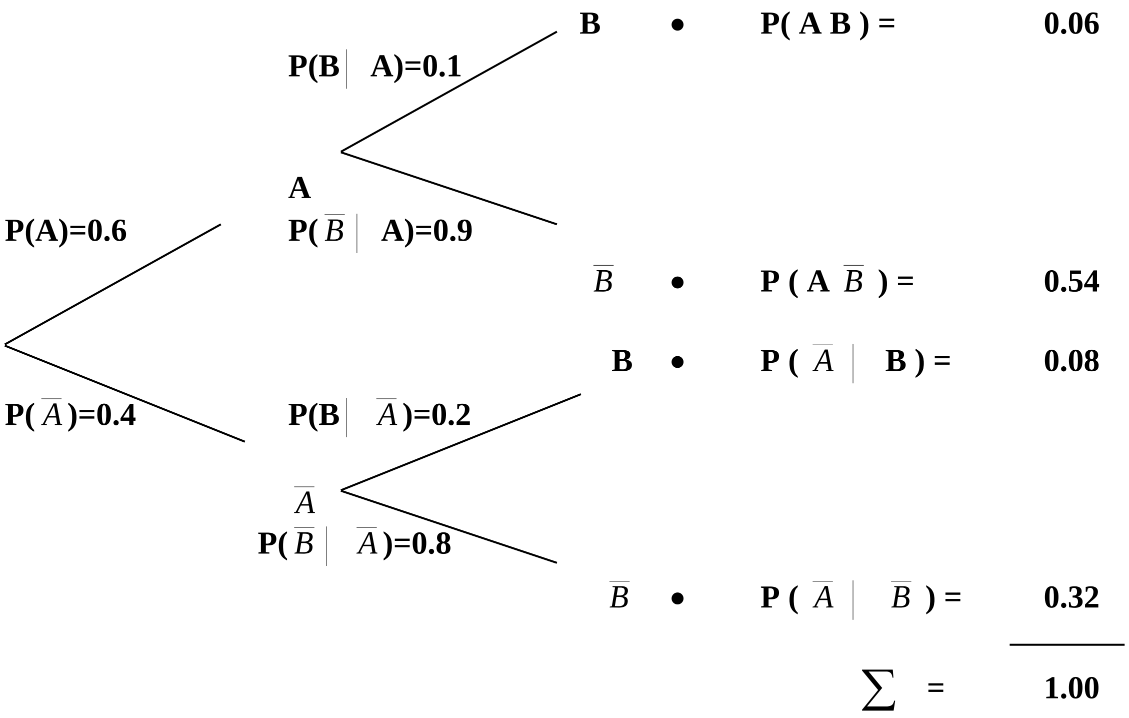
Problema :

En una industria se tienen dos máquinas I y II para fabricar zapatos. El 10 % de los zapatos de la maquina I sale con defectos y el 20 % de la maquina II. La maquina I fábrica el 60 % de los zapatos y la maquina II fábrica el resto. Si se extrae un zapato de la producción:

a) Cual es la probabilidad de que no tenga defectos.
b) Si el zapato que se extrae es defectuoso, cual es la probabilidad de que haya sido fabricado por la maquina I.

Eventos:

A: Zapatos fabricados por la maquina I
B: Zapato tiene defecto



A) $P(\bar{B}) = 0.54 + 0.32 = 0.86 =$ **<u>86 %</u>**

$$\text{B) } P(A|B) = \frac{P(A\,B)}{P(B)} = \frac{0.06}{0.14} = 0.42 = \underline{42\ \%}$$

Problema:

En cierta planta de montaje, tres máquinas b_1, b_2 y b_3, montan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe de la experiencia pasada que 2%, 3% y 2% de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente,

tienen defectos. Ahora, suponga que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

Solución:

Considere los eventos siguientes:

A: el producto esta defectuoso
B_1: el producto esta ensamblado por la maquina b_1
B_2: el producto esta ensamblado por la maquina b_2
B_3: el producto esta ensamblado por la maquina b_3

Al aplicar el teorema de probabilidad total o regla de eliminación, podemos escribir:

$$P(A) = P(B_1)\ P(A\ B_1) + P(B_2)\ P(A\ B_2) + P(B_3)\ P(A\ B_3)$$

$P(A \mid B_1) = 0.02$

$P(B_1)= 0.3$ $\quad B_1$ ———— A • $P(B_1A)=P(B_1)P(A \mid B_1)= 0.3(0.02)=0.006$

$P(B_2)=0.45$ $\quad P(A \mid B_2)=0.03$

B_2 ———— A • $P(B_2A)= P(B_2)P(A \mid B_2)=0.45(0.03)=0.0135$

$P(A \mid B_3)=0.02$

$P(B_3)=0.25$ $\quad B_3$ ———— A • $P(B_3A)=P(B_3)P(A \mid B_3)=0.25(0.02)=0.005$

Y de aquí:

$$P(A)= 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245 = 2.45\%$$

Con referencia al ejemplo anterior, si se elige al azar un producto y se encuentra que es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que este ensamblado por la maquina B_3?

Solución:

Con el uso de la regla de Bayes para escribir:

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(B_3)P(A \mid B_3)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3)}$$

Y después sustituir las probabilidades calculadas en el ejemplo anterior, tenemos:

$$P(B_3 \mid A) = \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49} = 0.2041 = 20.41\%$$

En vista del hecho de que se seleccionó un producto defectuoso, este resultado sugiere que probablemente no fue hecho con la maquina B_3

$$P(B_2 \mid A) = \frac{0.0135}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.0135}{0.0245} = 0.5510 = 55.10\%$$

$$P(B_1 \mid A) = \frac{0.006}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.006}{0.0245} = 0.2449 = 24.49\%$$

REGLA DE PROBABILIDAD TOTAL

La regla de multiplicar es útil para determinar la probabilidad de un evento que depende de otros. Por ejemplo, supóngase que, durante el proceso de fabricación de semiconductores, la probabilidad de que un circuito integrado que este sujeto a grandes niveles de contaminación sea causa de una falla en un producto, es 0.10. Por otra parte, la probabilidad de que un circuito que no está sujeto a altos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura sea la causa de una falla de 0.005. Es una corrida de producción particular, el 20% de los circuitos están sujetos a altos niveles de contaminación. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto que utilice algunos de estos circuitos integrados falle?

Es evidente que la Probabilidad pedida depende de si el circuito estuvo o no expuesto a altos niveles de contaminación. Este problema puede resolverse con el siguiente razonamiento.

Para cualquier evento B, este puede escribirse como la unión de la parte de B que está en A y la parte de B que está en A'. esto es:

$$B = (A \cap B)\ \ (A' \cap B)$$

La figura representa el diagrama de Venn que corresponde a este resultado. dado que A Y A' son mutuamente excluyentes, $A \cap B$ Y $A' \cap B$ también lo son. Por tanto, después de utilizar el resultado para la probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes dado por la ecuación 2-2, y la regla de multiplicación de la ecuación 2-6, se llega al resultado.

REGLA DE PROBABILIDAD TOTAL (PARA DOS EVENTOS)

Para cualquier par de eventos A y B,

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A') = P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A')\, P(A') \qquad (2\text{-}7)$$

Considere lo expuesto sobre contaminación al inicio de esta sección. Sean F: el evento donde el producto falla, y a: el evento donde el circuito está expuesto a altos niveles de contaminación. La probabilidad perdida es P(F), y la información proporcionada puede representarse de la siguiente manera:

$$P(F \mid A)= 0.10$$
$$P(F \mid A')= 0.005$$
$$P(A)= 0.20$$

Por consiguiente:

$$P(A')= 0.80$$

Y, de la ecuación 2-7, se tiene que

$$P(F)= 0.10\ (0.20) + 0.005\ (0.80) = 0.024$$

Resultado que puede interpretarse como el promedio ponderado de las dos probabilidades de falla.

El razonamiento utilizado para desarrollar la ecuación 2-7 puede aplicarse de manera más general. En el desarrollo de la ecuación 2-7 se utilizaron solo dos elementos, A Y A', mutuamente excluyentes. Sin embargo, fue importante el hecho de que A A' = S, esto es todo el espacio muestral. En general, se dice que una colección de conjuntos E_1, E_2,……E_X es exhaustiva se E_1 E_2 ……… E_X = S. La figura 2-19 presenta el particionamiento de un evento B por una colección de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

REGLA DE PROBABILIDAD TOTAL (PARA VARIOS EVENTOS)

Supóngase que E_1, E_2, …… E_K, son K conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivas. entonces,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\cap E_1) + P(B\cap E_2) + \dots\dots\dots + P(B\cap E_K) \\ &= P(B \mid E_1)P(E_1) + P(B \mid E_2)P(E_2) + \dots\dots\dots + P(B \mid E_K)P(E_K) \qquad (2\text{-}8) \end{aligned}$$

Considerese una vez más el ejemplo del proceso de fabricación de semiconductores, supóngase que 0.10 es la probabilidad de que un circuito integrado expuesto a altos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura sea la causa de falla en un producto; que 0.01 es la probabilidad de que un circuito integrado expuesto a niveles de contaminación medios durante el

proceso de manufactura sea el causante de una falla en un producto, y que 0.001 es la probabilidad de que un circuito integrado expuesto a bajos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura sea el causante de una falla en un producto. En una corrida de producción particular, el 20% de los circuitos están expuestos a altos niveles de contaminación; el 30% a niveles medios, y el 50% a bajos niveles. ¿Cuál es la probabilidad de que falle un producto que haga uso de uno de estos circuitos? sean:

E_1= El evento donde el circuito integrado está expuesto a altos niveles de contaminación.
E_2= El evento donde el circuito integrado está expuesto a niveles medios de contaminación.
E_3= el evento donde el circuito integrado está expuesto a niveles bajos de contaminación.

$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3) \cup (B \cap E_4)$

$P(B) = P(B \cap E1) + P(B \cap E2) + P(B \cap E3) + P(B \cap E4)$